베지어 곡면을 이용한 3D 모델링

**베지어 곡면은 수학적인 방법을 이용해 공학 설계를 하는 CAGD 분야에서 자동차 차체, 비행기 기체 등을 설계하는 데 자주 사용된다. 이는 베지어 곡면은 삼각형 분할에 비해 부드러운 곡면을 표현함에 더 강하고, 적은 메모리를 필요로 한다는 장점이 있기 때문이다. 우리는 베지어 곡면을 이용해 obj파일로 주어진 3D 모델을 근사하고 압축하는 방법을 다룬다. 이 연구는 3차원 공간상의 볼록 집합의 경계를 대상으로 하며 기존의 베지어 곡면을 이용한 point cloud(물체의 나타내는 점들)의 근사 방법을 확장해 연구했다. 고차 베지어 곡면은 다루기 까다롭기에 차 베지어 곡면을 이용하였으며, 이를 위해 point cloud를 원통형으로 분할하였다. 분할한 각 영역의 점들을 하나의 베지어 곡면으로 근사하였고, 이 과정에서 광선과 삼각형의 교점을 찾는 Möller–Trumbore intersection algorithm과 선행 연구를 참고해 최소제곱법, 뉴턴-랩슨 방법을 사용하였다. 베지어 곡면과 원 곡면의 차이를 나타내는 오차함수는 하우스도르프 거리가 적합하지만, 하우스도르프 거리는 계산량이 너무 많아서 적절히 변형해 적은 시간을 소모하게 만들었다. 더 나아가 엡실론-델타 논법을 이용해 곡면들이 충분히 근사 가능함을 수학적으로 증명하였다. 본 연구를 통해 곡면 모델링이 핵심이 되는 VR, AR 및 홀로그램의 컴퓨터 그래픽 분야에서의 활용이 기대된다. 또한 CAGD 분야에서 더 큰 활용이 가능하며 이에 따라 자동차, 선박, 비행기 뿐만 아니라 미래 우주 공학과도 직결되는 우주선이나 우주 정거장을 디자인하는 데도 사용될 수 있다.**

**1. 서론**

**1.1. 연구의 필요성**

3D 프린터, 홀로그램 및 VR과 AR은 지금도 활발하게 사용되고 있는 기술이고 미래 전망도 좋다. 이들이 실제로 상용화되기 위해선 보다 효율적으로 곡면을 다루기 위한 컴퓨터 그래픽 기술이 필수적이다.

현재 3D 모델을 저장하기 위해 obj파일이 흔히 사용된다. obj파일은 곡면을 표현하기 위해 삼각형 혹은 사각형 분할을 이용한다. 이러한 다각형 분할은 베지어 곡면을 이용한 압축에 비해 구면과 같은 부드러운 곡면을 표현하는 능력이 떨어진다. 또한 베지어 분할은 베지어 곡면이 가지는 조절점이라는 고유한 성질 덕에 메모리도 적게 소모한다.

본 연구는 obj파일 형식으로 주어진 3차원 공간상의 곡면을 조각별로 분할하여 베지어 곡면을 통해 근사 및 압축하는 방법을 제시한다. 이는 obj파일에 비해 메모리 측면에서의 이점을 가진다. 혹은 자동차, 선박, 비행기 등을 설계할 때 이용되는 CAD(Computer Aided Design) 중에서도 수학적인 도구를 이용하는 CAGD 분야에서의 활용이 기대된다.

**1.2. 이론적 배경**

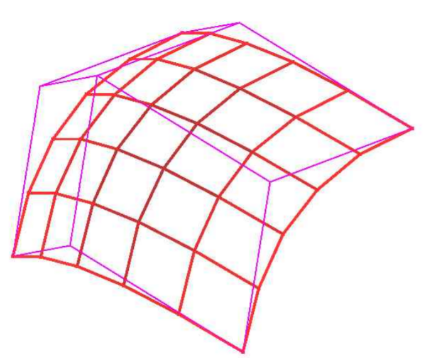
베지어 곡면은 CAGD의 주요 연구 대상 중 하나이다.

개의 점 에 대해 다음을 **차 베지어 다항식**이라 한다.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1) |

이때 Bernstein 다항식 이다. 베지어 다항식 에 의한 단위 정사각형 의 상(image)을 **차 베지어 곡면**이라 하고, 점 를 베지어 곡면의 **조절점**이라 한다.[1]

본 연구에서는 그림과 같은 차 베지어 곡면을 이용한다.



**Fig. 1. 차 베지어 곡면**

**2. 본문**

**2.1. 분할 방법**

본 연구에서는 obj파일이 주어졌을 때 베지어 곡면을 이용해 obj파일이 나타내는 곡면을 근사한다. 즉 상의 곡면 위의 정점 와 정점들을 꼭짓점으로 가지는 다각형 면 들이 주어진 상황을 생각한다. 차 베지어 곡면만으로는 곡면을 충분히 근사할 수 없기 때문에 곡면이 놓여있는 공간을 일정한 규칙에 따라 분할하고, 각 영역 속에 놓여있는 곡면을 하나의 베지어 곡면으로 근사한다.

영역을 분할하는 방법은 로 주어지는 원통형 좌표계에 대해 와 를 이등분하는 것이다. 자연수 에 대해 와 를 등분하고 각 영역에서 근사를 진행한다. 우리가 정의한 오차함수 (2)가 주어진 값 보다 크면, 을 만큼 늘려서 같은 과정을 반복한다. 그런데 원통형 분할을 할 경우 곡면의 형태에 따라 한 영역 안에 개 이상의 곡면 조각이 존재할 수 있다. 이런 문제를 피하기 위해 연구 대상을 의 볼록 집합의 경계로 제한한다.

**2.2. 근사 방법**

하나의 베지어 곡면을 구성하기 위해 개 조절점 를 찾으면 충분하다. 이 중에서 을 제외한 조절점은 Möller–Trumbore intersection algorithm을 이용해 구한다. 이는 공간상의 광선(직선)과 삼각형의 교점을 구하는 빠른 알고리즘이다.[2]

각 구역의 경계는 혹은 로 주어지므로 광선 와 obj파일의 면 들의 교점을 베지어 곡면의 네 조절점 로 놓을 수 있다. 베지어 곡면의 네 모서리, 즉 (1)에서 또는 가 또는 인 곡선은 차 베지어 곡선이 되는데, 베지어 곡선의 성질을 이용하면 을 제외한 나머지 조절점을 얻을 수 있다.

이제 을 구하기 위해 최소제곱법과 뉴턴-랩슨 방법을 사용한다. 최소제곱법은 [3]을 참고했다. 영역 안의 점을 로 놓고 이에 대응되는 베지어 곡면 위의 점을 다음과 같이 놓는다.

이제 의 제곱 오차를 최소로 하는 을 찾는다. 그리고 와 를 얻기 위해 뉴턴-랩슨 방법을 응용한다. 을 찾고 각각의 에 대해 다음 시행을 한다.

그러나 벡터의 나눗셈이 정의되지 않으므로 대신에 최소제곱오차를 가지는 스칼라 값으로 정의한다. 이 시행을 반복하면 와 을 얻는다.

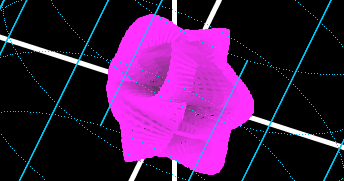
**2.3. 오차함수**

우리는 다음과 같은 오차함수를 정의하였다.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2) |

의 값이 충분히 작으면 원래 모델과의 차이를 거의 인식하지 못한다는 점에서 위 오차함수가 정당화된다.

그리고 앞서 말한 대로 오차함수 가 주어진 양수 보다 작아질 때까지 근사을 반복한다. 또한 이 시행을 충분히 반복해 의 값이 커질 경우 가 에 수렴한다는 사실을 증명하였다.



**Fig. 2. 반지름이 64인 구면을 근사시킨 모형**

**3. 결론**

본 연구에서 obj파일로 정점들의 집합과 곡면을 이루는 다각형 면들이 주어졌을 때 베지어 곡면을 이용해 원 곡면을 근사한다. 이를 위해 정점들을 원통형으로 분할하며, 분할된 각 영역에 대해 베지어 곡면의 성질과 Möller–Trumbore intersection algorithm, 최소제곱법, 뉴턴-랩슨 방법을 이용해 베지어 곡면을 구성하는 조절점을 얻는다. 더욱이 제시된 방법에 따라 연구 대상으로 하는 곡면들이 모두 충분히 근사될 수 있음을 보였다.

베지어 곡면은 삼각형 분할에 비해 더 효율적이며, 적은 메모리를 요구한다. 그렇기에 본 연구는 VR, AR 등 곡면에 대한 그래픽 기술을 다루는 분야에서의 활용이 기대되며 특히 CAGD 분야에 있어 의미있는 결과이다. 또한 기존에 3D 모델을 저장하기 위해 자주 사용되는 obj파일을 변환시키는 연구이기에 3D 모델링이 필요한 보다 다양한 분야와 접목시킬 수 있다.

**참고문헌**

[1] Farin, G. E. & Farin, G. *Curves and Surfaces for CAGD: a practical guide* (Morgan Kaufmann, 2002)

[2] Möller, T. & Trumbore, B. Fast, minimum storage ray-triangle intersection. *Journal of Graphics Tools* **2(1)**, 21-28. (1997)

[3] Lifton, J. J., Liu, T., & McBride, J. Non-linear least squares fitting of Bézier surfaces to unstructured point clouds. *AIMS Mathematics*, **6(4)**, 3142-3159. (2021)